Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
Tanger

Novembre 2010

M121

[1]Contrôle 1 : Durée 2h30mn

Exercice 1 :

a) Montrer que l'ensemble $U = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = -y\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = arcsin(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}})$$

est différentiable sur U. Calculer sa différetielle $df_{(x,y)}$.

Exercice 2 : Soit f une fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2\cos(\frac{x}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer les dérivées partielles premières de f, si elles existent, aux points :

i) (a,b) avec $b \neq 0$

ii) $(a,0)$ avec $a \in \mathbb{R}^2$.

c) Etudier la différentiabilité de f aux points :

i) (a,b) avec $b \neq 0$

ii) $(a,0)$ avec $a \in \mathbb{R}^2$.

d) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue aux points :

i) (a,b) avec $b \neq 0$

ii) $(0,0)$

e) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue au point $(a,0)$ avec $a \neq 0$.

Exercice 3 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x+y)^3 - y^2 - 3(x+y)$

a) Trouver les points stationaires de f.

b) Trouver les extremums, s'ils existent, de f.

Exercice 4 : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites données par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ ; \ v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

[1]Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 a/ . $U = \mathbb{R}^2 - V$; $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$

Considérons la fonction $f(x,y) = x+y$ définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.

On a $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

$C_{\mathbb{R}}^{\{0\}} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est un ouvert dans $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \{0\}$ est un fermé, Comme f est continue sur $\mathbb{R}^2$ alors $V = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé $\Rightarrow U = C_{\mathbb{R}^2}^{V}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

b/ Rappel: Arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$

$f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)$

On a : $\left|\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right| = 1 \Leftrightarrow |1-xy| = \sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2} \Leftrightarrow (1-xy)^2 = 1+x^2+y^2+x^2y^2$

$\Rightarrow 1+x^2y^2-2xy = 1+x^2+y^2+x^2y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -x$

$\Leftrightarrow (x,y) \notin U$

Les 2 fonctions : $(x,y) \xrightarrow{f_1} 1-xy$ et $(x,y) \xrightarrow{f_2} \sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ (leurs dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$)

donc $f_3 = \dfrac{f_1}{f_2}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car $f_2(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Or $|f_3| = 1 \Leftrightarrow (x,y) \notin U$ donc f est différentiable sur U

et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $df_{(x,y)}(h,k) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \times k$

Posons $u(x,y) = \dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}} = (1-xy)(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{-1/2}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -y\,(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{-1/2} - \dfrac{1}{2}(1-xy)(2x+2xy^2)(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{-3/2}$

$= (1+x^2+y^2+x^2y^2)^{-3/2}\left(-y - yx^2 - y^3 - x^2y^3 - x - xy^2 + x^2y + x^2y^3\right) = \dfrac{-x-y-xy^2-y^3}{(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{3/2}}$

De même $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-y-x-x^2y-x^3}{(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{3/2}}$ (à cause de la symétrie entre x et y)

$\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1+x^2y^2-2xy}{1+x^2+y^2+x^2y^2}} = \sqrt{\dfrac{x^2y^2+2xy}{1+x^2+y^2+x^2y^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2y^2+2xy}}{(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{1/2}}$

$df_{(x,y)}(h,k) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2y^2+2xy}\,.\,(1+x^2+y^2+x^2y^2)}\left((-x-y-xy^2-y^3)h + (-y-x-x^2y-x^3)k\right)$

Exercice $f(x,y) = y^2\cos\left(\frac{x}{y}\right)$ $y \neq 0$; $f(x,y) = 0$; si $y = 0$

1/ * Continuité sur $D = \{(a,b) ; b \neq 0\}$

Les fonctions $(x,y) \xrightarrow{f_1} \frac{x}{y}$, $x \xrightarrow{f_2} \cos x$; $(x,y) \xrightarrow{f_3} y^2$ sont continues respectivement sur D, $\mathbb{R}$, D alors $f = f_3 \times f_2 \circ f_1$ est continue sur D

* Continuité en $(a,0)$; $a \in \mathbb{R}$ $\qquad (|\cos x| \leq 1)$

$\forall y \neq 0$ $|f(x,y)| = |y^2\cos\frac{x}{y}| = y^2|\cos\frac{x}{y}| \leq y^2$

On a $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} y^2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = 0 = f(a,0)$ donc f est continue en $(a,0)$

par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}^2$

2/ i/ Les fonctions $x \longrightarrow f(x,y)$ et $y \longrightarrow f(x,y)$ sont dérivables sur D car les fonctions $x \longmapsto y^2$, $y \to \frac{x}{y}$, $x \longmapsto \frac{x}{y}$, $y \to y^2$, soit dérivables sur D. et $x \to \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f admet des dérivées partielles au points (a,b) avec $b \neq 0$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin\frac{x}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos\frac{x}{y} - x\sin\frac{x}{y}$

d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -b\sin\frac{a}{b}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2b\cos\frac{a}{b} - a\sin\frac{a}{b}$

ii/ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(a,0)-f(0,0)}{a-0} = \lim\limits_{x\to a} \frac{0-0}{a} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(a,y)-f(a,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^2\cos\frac{a}{y}}{y} = \lim\limits_{y\to 0} y\cos\frac{a}{y} = 0$ car $|y\cos\frac{a}{y}| \leq |y|$ et $\lim\limits_{y\to 0}|y| = 0$

donc f admet des dérivées partielles au point $(a,0)$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = 0$

3/ i/ Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D, car elles sont la somme, produits et la composée des fonctions continues sur D, à savoir : $(x,y) \longrightarrow y$, $(x,y) \longrightarrow \sin\frac{x}{y}$, $(x,y) \longrightarrow \cos\frac{x}{y}$. donc f est différentiable sur D

ii/ Différentiabilité en $(a,0)$

Si f est différentiable en $(a,0)$ alors $df_{(a,0)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,0).x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,0).y = 0x + 0y = 0$

De plus $|\varepsilon(x,y)| = \left|\frac{f(x,y) - f(a,0) - df_{(a,0)}(x,y)}{\|(x-a, y-0)\|}\right| = \left|\frac{y^2\cos\frac{x}{y}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right| \leq \frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$

On pose $\begin{cases} x-a = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ alors $\left|\frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right| = \left|\frac{r^2\sin\theta}{r}\right| = |r\sin\theta| \leq r$

$\lim\limits_{r\to 0} r = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} \frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} \varepsilon(x,y) = 0$ donc f est diff. en $(a,0)$

4/ i/ Continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur D

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est la somme, produit et la composée des fonctions continues sur D, à savoir

$(x,y) \longrightarrow x$, $(x,y) \longrightarrow y$, $(x,y) \longrightarrow \sin\frac{x}{y}$, $(x,y) \longrightarrow \cos\frac{x}{y}$

ii/ Continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$

On a $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|2y\cos\frac{x}{y} - x\sin\frac{x}{y}\right| \leq \left|2y\cos\frac{x}{y}\right| + \left|x\sin\frac{x}{y}\right| \leq 2|y| + |x|$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2|y| + |x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est cont en $(0,0)$

5/ Montrons $\frac{\partial f}{\partial y}$ est non continue en $(a,0)$; $a \neq 0$

- On a $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} 2y\cos\frac{x}{y} = 0$ car $\left|2y\cos\frac{x}{y}\right| = |2y|\left|\cos\frac{x}{y}\right| \leq 2|y|$, et $\lim\limits_{(a,0)} 2|y| = 0$

- Montrons que la fonction $g(x,y) = x\sin\frac{x}{y}$ n'a pas de limite en $(a,0)$.

Rappel : F admet une limite ℓ en $(a,b) \Leftrightarrow \forall\ X_n = (x_n, y_n)$ c.v vers (a,b)
$f(X_n)$ c.v vers ℓ

Considérons la suite $(x_n, y_n) = \left(a, \frac{a}{\frac{\pi}{2}-n\pi}\right)$ qui converge vers $(a,0)$ alors que $g(x_n,y_n) = a\sin\left(\frac{a}{\frac{a}{\frac{\pi}{2}-n\pi}}\right) = a\sin\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ n'a pas de limite

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'a pas de limite en $(a,0)$ d'où $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas cont en $(a,0)$
$a \neq 0$

Exercice 3 $f(x,y) = (x+y)^3 - y^2 - 3(x+y)$

a/ Points stationnaires : $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 - 3 = 0 & (1) \\ 3(x+y)^2 - 2y - 3 = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) - (2)$: $2y = 0 \Rightarrow y = 0$; $(1) \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1$

les points stationnaires sont $(1,0)$ et $(-1,0)$

b/ $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6(x+y)$ $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6(x+y)$ $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6(x+y) - 2$

Au point $(1,0)$: $r = 6$ $s = 6$ $t = 4$ $D = rt - s^2 = -12 < 0$

donc f n'admet pas d'extremum au point $(1,0)$

Au point $(-1,0)$: $r = -6$ $s = -6$ $t = -8$ $D = 12 > 0$

et $r < 0$ alors f admet un maximum au point $(-1,0)$ de valeur $f(-1,0) = 2$

Exercice 4 $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $V_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ $W_n = U_n - V_n$

a/ M. que la serie $\sum U_n$ est c.v

b/ M. que la serie $\sum W_n$ est div

c/ En deduire la nature de la serie $\sum V_n$

a/ $U_n = (-1)^n . x_n$ avec $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

(x_n) est une suite positive $(\forall n \in \mathbb{N}^* : x_n > 0)$, decroissante $(\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} < x_n)$ vers 0 $(\lim_{\infty} x_n = 0)$ donc $\sum U_n$ est une suite alternée donc $\sum U_n$ c.v

b/ $W_n = U_n - V_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n \sqrt{n} + 1 - \sqrt{n}(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}} = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$

$W_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ car $\lim_{\infty} \frac{W_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{\infty} \frac{n}{n + (-1)^n \sqrt{n}} = \lim_{\infty} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{1+0} = 1$

Or $\sum \frac{1}{n}$ div $\Rightarrow \sum W_n$ div

c/ On a $W_n = U_n - V_n \Rightarrow V_n = U_n + W_n$; $\sum U_n$ c.v et $\sum W_n$ div $\Rightarrow \sum V_n$ div